

Разбор задачи «Баянический квадрат»

Рассмотрим преобразование нашего квадрата, при котором значения во всех внутренних клетках одновременно заменяются на среднее арифметическое соседей. Ясно, что если это преобразование применить к баяническому квадрату, то значения в его клетках не изменятся. Если же квадрат не являлся баяническим, и при этом известно, что баянический квадрат с такими числами на границе существует и единственен, то после этого преобразования квадрат стал ближе к баяническому в следующем смысле. Рассмотрим клетки, в которых разность между значением в клетке нашего квадрата и значением в соответствующей клетке баянического квадрата максимальна. Тогда после нашего преобразования количество клеток с такой разностью уменьшилось; в частности, если клетка с максимальной разностью была одна, то и сама максимальная разность уменьшилась. Действительно, если пусть в некоторой клетке разность максимальна, а в какой-то из соседних — не максимальна; очевидно, что если квадрат не баянический, то максимальная разность больше нуля, и такая клетка существует. Легко показать, что при замене значения в этой клетке на среднее арифметическое значений в её соседях эта разность уменьшится, что и требовалось доказать.

Таким образом, решение задачи состоит в том, чтобы сначала заполнить внутренние клетки квадрата произвольными числами, а затем применить наше преобразование достаточно много раз. Завершать работу алгоритма можно либо после некоторого фиксированного количества итераций, либо когда значения в клетках следующего полученного квадрата будут отличаться от значений в клетках предыдущего не более, чем на некоторую очень малую величину. Сократить количество итераций можно, выбрав подходящие начальные значения для внутренних клеток — например, нули или среднее значение чисел на границе. При заданных ограничениях на размер квадрата и требуемой точности достаточно было сделать несколько тысяч итераций, чтобы получить правильный ответ.

Можно также доказать, что для любых значений на границе баянический квадрат существует и единственен; однако, поскольку это гарантировалось в условии задачи, на соревновании делать этого не требовалось.