# Разбор задачи «Дороги»

Построим граф $G$, вершины в котором будут соответствовать городам в стране царя Васи, и две вершины будут соединены ребром тогда и только тогда, когда соответствующие им города соединены дорогой. Тогда условие задачи можно будет переформулироватль следующим образом. Найти количество способов дополнить данный граф до связного, добавив при этом наименьшее возможное число рёбер, и вывести это количество по модулю $K$. Пусть в $G$ имеется $k$ компонент связности, мощности которых равны $a_1, a_2, \dots, a_k$. Тогда чтобы сделать граф $G$ связным, нужно будет добавить не менее $k-1$ ребра. С другой стороны, легко видеть, что $k-1$ ребра достаточно, чтобы сделать граф связным. При этом очевидно, что искомое количество способов зависит только от чисел $a_1, a_2, \dots, a_k$ и не зависит от внутренней структуры компоненты связности. Поэтому искомое количество можем обозначить через $f(\{a_1, a_2, \dots, a_k\})$. Докажем индукцией по $k$, что

$$f(\{a_1, a_2, \dots, a_k\}) = a_1 a_2 \dots a_k (a_1 + a_2 + \dots + a_k)^{k-2}. \tag{1}$$

База при $k = 1$ очевидна. Предположим, что мы доказали (1) для всех $k \leqslant k_0$ и докажем её для $k = k_0 + 1$. Рассмотрим некоторый способ дополнить граф до связного и рассмотрим $(k_0+1)$-ю компоненту связности. Пусть $S \subset \{1, \dots, k_0\}$ - в точности непустое множество индексов компонент связности, с которыми новым ребром соединена $(k_0+1)$-я компонента. Такое соединение могло быть произведено

$$(a_{k_0+1})^{|S|} * \prod_{i \in S} a_i$$

способами. Причём компоненты с индексами из $S$ уже будут соединены между собой, поэтому получившийся граф можно будет дополнить до связного

$$f(\{a_i \,|\, 1 \leqslant i \leqslant k_0,\, i \notin S\} \bigcup \{\sum_{i \in S} a_i\})$$

способами. Таким образом получаем для $f$ следующую формулу:

$$f(\{a_1, a_2, \dots, a_{k_0+1}\}) = \sum_{\substack{S \subset \{1, \dots, k_0\} \\ S \neq \emptyset}} (a_{k_0+1})^{|S|} * \prod_{i \in S} a_i * f(\{a_i \,|\, 1 \leqslant i \leqslant k_0,\, i \notin S\} \bigcup \{\sum_{i \in S} a_i\})$$

Преобразуем её, сгруппировав слагаемые с одинаковой $|S|$, и воспользовавшись предположением индукции:

$$f(\{a_1, a_2, \dots, a_{k_0+1}\}) = \sum_{\substack{S \subset \{1, \dots, k_0\} \\ S \neq \emptyset}} \left( (a_{k_0+1})^{|S|} * \prod_{i \in S} a_i * f(\{a_i \,|\, 1 \leqslant i \leqslant k_0,\, i \notin S\} \bigcup \{\sum_{i \in S} a_i\}) \right) =$$

$$= \sum_{l=1}^{k_0} \left( (a_{k_0+1})^l \sum_{\substack{S \subset \{1, \dots, k_0\} \\ |S| = l}} \left( \prod_{i \in S} a_i * f(\{a_i \,|\, 1 \leqslant i \leqslant k_0,\, i \notin S\} \bigcup \{\sum_{i \in S} a_i\}) \right) \right) =$$

$$= \sum_{l=1}^{k_0} \left( (a_{k_0+1})^l \sum_{\substack{S \subset \{1,\dots,k_0\} \\ |S|=l}} \left( \prod_{i=1}^{k_0} a_i * \sum_{i \in S} a_i * \left( \sum_{i=1}^{k_0} a_i \right)^{k_0-l-1} \right) \right) =$$

$$= \sum_{l=1}^{k_0} \left( (a_{k_0+1})^l * \prod_{i=1}^{k_0} a_i * \left( \sum_{i=1}^{k_0} a_i \right)^{k_0-l-1} * \sum_{\substack{S \subset \{1,\dots,k_0\} \\ |S|=l}} \sum_{i \in S} a_i \right).$$

Выражение

$$\sum_{\substack{S \subset \{1,\dots,k_0\} \\ |S|=l}} \sum_{i \in S} a_i$$

симметрично относительно $a_1, a_2, \dots, a_{k_0}$ и содержит $C_{k_0}^l * l$ слагаемых, поэтому каждое $a_i$ входит в эту сумму $C_{k_0}^l * l / k_0 = C_{k_0-1}^{l-1}$ раз. Поэтому

$$\sum_{\substack{S \subset \{1,\dots,k_0\} \\ |S|=l}} \sum_{i \in S} a_i = C_{k_0-1}^{l-1} \sum_{i=1}^{k_0} a_i$$

.

Но тогда

$$f(\{a_1, a_2, \dots, a_{k_0+1}\}) = \sum_{l=1}^{k_0} \left( C_{k_0-1}^{l-1} * (a_{k+1})^l * \prod_{i=1}^{k_0} a_i * \left( \sum_{i=1}^{k_0} a_i \right)^{k_0-l} \right) =$$

$$= \prod_{i=1}^{k_0+1} a_i * \sum_{l=0}^{k_0-1} \left( C_{k_0-1}^{l} * (a_{k+1})^l * \left( \sum_{i=1}^{k_0} a_i \right)^{k_0-l-1} \right) = \prod_{i=1}^{k_0+1} a_i * \left( \sum_{i=1}^{k_0+1} a_i \right)^{k_0-1}$$

Последний переход - формула бинома Ньютона. Таким образом формула (1) доказана для $k = k_0+1$, а значит, по методу мат. индукции верна для любого натурального $k$.

Таким образом, благодаря формуле (1), задача свелась к нахождению количества и мощностей компонент связности графа $G$. Это можно сделать, например, при помощи поиска в глубину.