Разбор задачи «Самолёт»

Будем считать поверхность планеты сферой радиуса 1 с центром в начале координат. Пусть $A(x_1, y_1, z_1)$ — столица, $B(x_2, y_2, z_2)$ — резиденция. Тогда кратчайший путь между столицей и резиденцией лежит в плоскости, проходящей через A, B и начало координат. Если точки A и B симметричны относительно начала координат, то таких плоскостей бесконечно много. В частности, найдётся плоскость, проходящая через северный полюс. Поэтому в этом случае ответом является сам северный полюс.

Пусть теперь A и B не симметричны относительно начала координат. Тогда такая плоскость P единственна, и уравнение этой плоскости имеет вид $ax + by + cz = 0$, где $a = y_1z_2 - z_1y_2,\ b = x_2z_1 - x_1z_2,\ c = x_1y_2 - x_2y_1$. Плоскость P пересекает сферу по окружности S. Найдём точку C с максимальной координатой по оси Oz, что равносильно тому, что она ближайшая к северному полюсу, на окружности S.

Если точки A и B лежат на экваторе, то ответом является любая точка кратчайшего пути. В частности, подходят точки A и B. Если же хотя бы одна из точек A или B не лежит на экваторе, то такая точка C определена однозначно, и её можно искать, например, методом множителей Лагранжа.

Для этого рассмотрим функцию

$$L(x, y, z) \ = \ z - \frac{\mu}{2}(x^2 + y^2 + z^2 - 1) + \lambda(ax + by + cz).$$

Чтобы точка $C(x, y, z)$ была точкой экстремума функции L необходимо, чтобы она удовлетворяла следующей системе:

$$\begin{cases} -\mu x + \lambda a &= 0 \\ -\mu y + \lambda b &= 0 \\ 1 - \mu z + \lambda c &= 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 &= 1 \\ ax + by + cz &= 0 \end{cases}$$

Выражая x, y и z из первых трёх уравнений и подставляя в пятое находим, что

$$\lambda = -\frac{c}{a^2 + b^2 + c^2}.$$

(Следует заметить, что так как A или B не лежит на экваторе, то $a^2 + b^2 + c^2 > 0$.)

Затем подставляя их в четвёртое уравнение системы находим, что

$$\mu^2 = \frac{a^2 + b^2}{(a^2 + b^2 + c^2)^2}.$$

Теперь из первых трёх уравнений системы легко найти x, y и z. Причём, так как нас интересует точка с наибольшей $z = \frac{\lambda c + 1}{\mu}$, то μ следует взять положительным. Теперь если точка C лежит на кратчайшем пути, то она и является ответом. А если не лежит, то ответом является точка A или B, в зависимости от того, какая из ближе к северному полюсу.