Разбор задачи «Лекция»

Эта задача является одним из многих частных случаев *задачи о рюкзаке*. Дан набор теорем различной ценности v_i и длительности $l_i \in \{1, 2, 3\}$ (в минутах лекции). Требуется выбрать набор теорем максимальной суммарной ценности, который укладывается по времени в длительность лекции t.

Во-первых, стоит заметить, что различных длительностей всего три. Преобразуем исходные данные в три массива a_1, a_2, a_3, хранящие ценности теорем. Очевидно, что при равной длительности следует выбирать более ценную теорему. Отсортируем массивы по убыванию ценности, теперь набор чисел p_1, p_2, p_3 будет задавать набор из p_1 лучших теорем длительности 1, p_2 лучших теорем длительности 2 и p_3 теорем длительности 3. Можно быстро вычислить суммарную длительность такого набора, а также суммарную ценность — для этого потребуется предварительно сосчитать кумулятивные (частичные) суммы массивов a_i.

Предположим, что лекция не способна вместить все теоремы. Тогда оптимальный ответ будет иметь длительность от $t-2$ до t. Действительно, иначе можно добавить любую неиспользованную теорему. Переберём эту оптимальную длину, перейдя таким образом к более простой задаче.

При фиксированном времени x задачу можно решить следующим образом. Сначала найдём оптимальное решение для максимально возможного p_3 (это можно сделать перебором p_1). Затем будем последовательно переходить к меньшим p_3; при этом оптимальные p_1 и p_2 будут изменяться не сильно.

При переходе от p_3 к $p_3 - 1$ длительность уменьшается на 3, поэтому требуется изменить p_1 и p_2 соответственно. При этом следует вспомнить, что предыдущее состояние было оптимальным для своего p_3. Поэтому не имеет смысла рассматривать изменения, которые можно *упростить*. Под словом *упростить* будем понимать следующее: заменить одну теорему длины 2 на 2 теоремы длины 1, либо наоборот так, чтобы суммарное число изменённых теорем уменьшилось. Обоснование: пусть неупрощённое изменение приносит бóльшую пользу, чем упрощённое. Тогда замену, соответствующую упрощению, можно было выполнить и на предыдущем шаге (для предыдущего p_3), и она бы принесла ненулевую пользу. Это противоречит предположению об оптимальности результата, полученного на предыдущем шаге.

Таким образом, остаются лишь три перехода из состояния $\{p_1, p_2, p_3\}$ — это переходы в $\{p_1 + 3, p_2, p_3 - 1\}$, $\{p_1 + 1, p_2 + 1, p_3 - 1\}$ и $\{p_1 - 1, p_2 + 2, p_3 - 1\}$.

В итоге получается решение, требующее $O(N \log N)$ времени на сортировку и $O(N)$ на основную часть решения.

Не следует забывать и о частных случаях: к примеру, когда один из массивов a_i пуст, или когда все теоремы можно уместить в лекцию.

Укажем ещё один метод решения задачи (без доказательства). Из-за малых длительностей теорем (1, 2 и 3) задача близка к непрерывной задаче о рюкзаке, которую можно решать жадно. Отсортируем теоремы по удельной ценности (ценности в единицу времени), и будем брать самую удельно ценную теорему из оставшихся до тех пор, пока либо время лекции, либо теоремы не подойдут к концу. Оказывается, что, если мы нашли таким образом решение $\{p_1, p_2, p_3\}$, то, чтобы найти оптимальное решение, достаточно перебрать все решения вида $\{p_1 + d_1, p_2 + d_2, p_3 + d_3\}$, где $|d_i| \leqslant 3$ и суммарная длина не превосходит длину лекции.