

Разбор задачи «A + B»

Система счисления с основанием $\sqrt{-4}$, или же $2i$, обладает особым свойством: в ней любое комплексное число может быть представлено без знака с помощью цифр 0, 1, 2 и 3¹. Рассматриваемые в этой задаче числа ограничены ещё и записью в целом виде, поэтому некоторые значения им недоступны (к примеру, мнимая часть всегда будет делиться на 2). Несмотря на это, они замкнуты относительно сложения², что и демонстрируется следующим решением.

Во входном файле будут записаны два числа, состоящие из цифр от 0 до 3. Первым действием следует просто сложить цифры на соответствующих позициях.

Затем нужно заметить, что множитель $(i + 2)$ -й позиции в -4 раза больше, чем множитель i -й. Поэтому следующая операция не изменит значение числа: прибавить $4k$ в i -й позиции и прибавить k в $(i + 2)$ -й позиции (k может быть отрицательным).

Таковыми операциями несложно привести i -ю цифру в границы $[0; 3]$. Если последовательно выполнять эту операцию для всех цифр от нулевой, решение будет завершено.

Для доказательства корректности остаётся заметить, что этот процесс конечен: сумма абсолютных значений (модулей) цифр с каждой итерацией уменьшается.

Для успешной реализации не следует забывать, что длина получившегося числа может быть больше максимума из длин исходных чисел. И, в отличие от обычной «длинной арифметики», она может превысить это число больше, чем на 1.

Оценим возможное увеличение длины. Заметим, что после поразрядного сложения цифр в каждом разряде получилось число от 0 до 6. Нетрудно доказать по индукции, что после переноса из i -го разряда в $(i + 2)$ -й, $(i + 2)$ -й разряд изменится не более чем на 1, и там окажется число от -1 до 7. Иначе говоря, каждый перенос требует не более одной операции.

Пусть n — это максимум из длин слагаемых. После переноса из n -го разряда в $(n + 2)$ -й, где ранее был 0, в $(n + 2)$ -м разряде окажется число от -1 до 1. Перенос из $(n + 2)$ -го разряда в $(n + 4)$ -й будет осуществлен только в случае получения -1 , и после этого из $(n + 4)$ -го разряда перенос не потребуются. Таким образом получаем, что длина результата может превосходить длины слагаемых не более, чем на 4.

При выводе результата необходимо удаление ведущих нулей, и, как обычно в задачах с длинной арифметикой, нужно уделить внимание выводу числа 0. В этой задаче 0 может получиться не только как сумма двух нулей, например, $1_{2i} + 10_{3_{2i}} = 0$.

¹Во втором томе «Искусства программирования» Д. Э. Кнута есть упоминание этого факта и ссылка на его же публикацию.

²То есть, складывая два числа, представленных как целые в этой системе счисления, мы получаем число, которое также можно представить как целое в этой системе счисления. На самом деле это просто все комплексные числа, вещественная часть которых целая, а мнимая — целая и чётная.